

Dev n° 3

Ref: Daniel Li
 "Intégration et applications"
 p 196 - 401/402

Attention erreur calculs des int dans
 le livre (signe)

Théorème (Fubini) : Soit $f \in L^1(\Omega \times \Omega', \mu \otimes \nu)$. Alors :

- La fonction $x \mapsto \int_{\Omega'} f(x, y) d\nu(y)$ est définie pour presque tout x et est dans $L^1(\Omega)$.
- La fonction $y \mapsto \int_{\Omega} f(x, y) d\mu(x)$ est définie pour presque tout y et est dans $L^1(\Omega')$.

En outre on a

$$\int_{\Omega \times \Omega'} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega'} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{\Omega'} \left(\int_{\Omega} f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

où $\mu \otimes \nu$ est la mesure produit.

Contre-exemple Fubini :

Posons $f:]0, 1[^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ pour $(x, y) \in]0, 1[^2$

- a) Calculer : $\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dx \right] dy$ et $\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dy \right] dx$
 b) Montrons que f n'est pas intégrable sur $]0, 1[^2$.
 c) Conclure

a) On a :

• Par $y > 0$:

$$\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = \left[\frac{-x}{x^2 + y^2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{-1}{1 + y^2}$$

Donc,

$$I_1 = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy = \int_0^1 \frac{-1}{1 + y^2} dy$$

$$= - \left[\arctan y \right]_0^1 = -\frac{\pi}{4}$$

• Par $x > 0$:

$$\int_0^1 f(x, y) dy = \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Donc, on a :

$$I_2 = \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dy \right] dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$= \left[\arctan x \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

On remarque que $I_1 \neq I_2$. Mais Pourquoi?

b) Posons $A = \{(x, y) \in]0, 1[^2 \mid x \geq y\}$ et $B = \{(x, y) \in]0, 1[^2 \mid x < y\}$.

$$\int_{]0, 1[\times]0, 1[} \left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| dx dy = \int \left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| dx dy + \int \left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| dx dy$$

$$\int_{]0,1[^2} \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| dx dy = \int_A \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| dx dy + \int_B \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| dx dy$$

On intègre ici une quantité positive sur des espaces σ -finis.
Alors, le théorème de Fubini-Tonelli dit que :

$$\begin{aligned} \int_A \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| dx dy &\stackrel{F.T.}{=} \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty \end{aligned}$$

Le même calcul donnerait que la seconde intégrale est aussi infinie (par la symétrie de x et y).

Mais on n'en a pas besoin : il nous suffit de savoir qu'elle est positive pour en conclure que

$$\int_{]0,1[^2} |f(x,y)| dx dy = +\infty.$$

Et donc que f n'est pas intégrable sur $]0,1[^2$.

On ne peut donc pas utiliser le théorème de Fubini. $\square$

f) Conclusion : il n'y a pas égalité car le Théorème de Fubini ne s'applique pas, puisque f n'est pas intégrable sur $[0,1]^2$.

Exemple :

On a pour $t \in \mathbb{R}$; $u * v(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x-t) v(t) dt$, avec u, v intégrable.

M.g. $u * v$ est intégrable par p.tout t et bien définie par p.tout t .

Posons $F(t,x) = u(x-t) v(t)$ mesurable sur $\mathbb{R}^2$.

On a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |F(t,x)| d(t,x) &\stackrel{F.T.}{=} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |u(x-t) v(t)| dx \right] dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left[\int_{\mathbb{R}} |u(x-t)| dx \right]}_{I_u} |v(t)| dt \\ &= I_u * \int_{\mathbb{R}} |v(t)| dt < +\infty. \end{aligned}$$

Done, par Fubini on a le résultat souhaité. $\square$

Lorsque Lebesgue définit en 1903 une nouvelle intégrale, la justification de l'interversion dans ce nouveau cadre se pose. Fubini y répond en 1907 (dans le cas des domaines du plan) en démontrant que cela est possible si la fonction est intégrable (en tant que fonction de deux variables). Quatre ans plus tard, il démontre une condition suffisante pour qu'une fonction soit intégrable sur $[a, b] \times [c, d]$: il suffit que

$$\int_a^b \left(\int_c^d |f(x, y)| dy \right) dx < +\infty.$$

En réalité, Tonelli avait déjà démontré ce résultat entretemps, en 1909.

Alors que le théorème de Tonelli n'est vrai que pour des mesures σ -finies, le théorème de Fubini est encore valable lorsque les espaces mesurés sont complets (c'est-à-dire que tous les ensembles négligeables sont mesurables). Dans ce cas, on n'a pas forcément unicité de la mesure produit, et on peut utiliser dans l'énoncé précédent toute mesure produit.

Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ et $(\Omega', \mathcal{B}', \nu)$ des espaces mesurés σ -finis (on pourra penser à des ouverts de $\mathbb{R}^n$ par exemple munis de la mesure de Lebesgue).

Théorème (Tonelli) : Soit $f: \Omega \times \Omega' \rightarrow [0, +\infty]$ mesurable. Alors :

- Pour tout $x \in \Omega$, $y \mapsto f(x, y)$ est $\mathcal{B}'$ -mesurable et $x \mapsto \int_{\Omega'} f(x, y) d\nu(y)$ est $\mathcal{B}$ -mesurable.
- Pour tout $y \in \Omega'$, $x \mapsto f(x, y)$ est $\mathcal{B}$ -mesurable et $y \mapsto \int_{\Omega} f(x, y) d\mu(x)$ est $\mathcal{B}'$ -mesurable.

En outre on a

$$\int_{\Omega \times \Omega'} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega'} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{\Omega'} \left(\int_{\Omega} f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

où $\mu \otimes \nu$ est la mesure produit.

Contre exemple Fubini

13

Thm: (Fubini)

Soit $f \in L^1(\Omega \times \Omega')$. (Ici mesure de Lebesgue)

Alors, la fonction:

- $x \mapsto \int_{\Omega'} f(x, y) dy$ est déf. pour presque tout x et est dans $L^1(\Omega)$.
- $y \mapsto \int_{\Omega} f(x, y) dx$ est déf. pour presque tout y et est dans $L^1(\Omega')$.

En outre on a:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times \Omega'} f(x, y) dx dy &= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega'} f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_{\Omega'} \left(\int_{\Omega} f(x, y) dx \right) dy \end{aligned}$$

Ex:

Soit $f:]0, 1[\times]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$

Démo:

a) Calcul:

On a:

* Pour $y > 0$:

$$\int_0^1 f(x, y) dx = \left[\frac{-x}{x^2 + y^2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{-1}{1 + y^2}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy = \left[\arctan y \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

* Pour $x > 0$:

$$\int_0^1 f(x, y) dy = \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = \left[\arctan x \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

On r.q. $I_1 \neq I_2$.

b) Il n'y a pas intégrable sur $]0, 1[\times]0, 1[$:

Posons $A := \{(x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[\mid x \geq y\}$ et $B := \{(x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[\mid x < y\}$.

On a:

$$\int_{]0, 1[\times]0, 1[} |f(x, y)| dx dy = \int_A |f(x, y)| dx dy + \int_B |f(x, y)| dx dy$$

On intègre sur des c. σ -finis une quantité positive.

On a:

$$\begin{aligned} \int_A |f(x, y)| dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty. \end{aligned}$$

Comme l'intégrale sur B est positive on a que:

$$\int_{]0, 1[\times]0, 1[} |f(x, y)| dx dy = +\infty$$

Donc, $f \notin L^1(]0, 1[\times]0, 1[)$.

On peut donc pas utiliser le thm de Fubini. Comme f n'est pas un élément de $L^1(]0, 1[\times]0, 1[)$.

Exemple:

Posons $f(t, x) = u(x-t)v(t)$ mesurable sur $\mathbb{R}^2$.

On a:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |f(t, x)| d(x, t) &\stackrel{F.T.}{=} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |u(x-t)| dx \right] |v(t)| dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |u(x-t)| dx}_{I(x)} |v(t)| dt < +\infty. \end{aligned}$$

Par Fubini, on a le résultat sur $u \otimes v$.